TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

Studijski program: Primijenjeno računarstvo

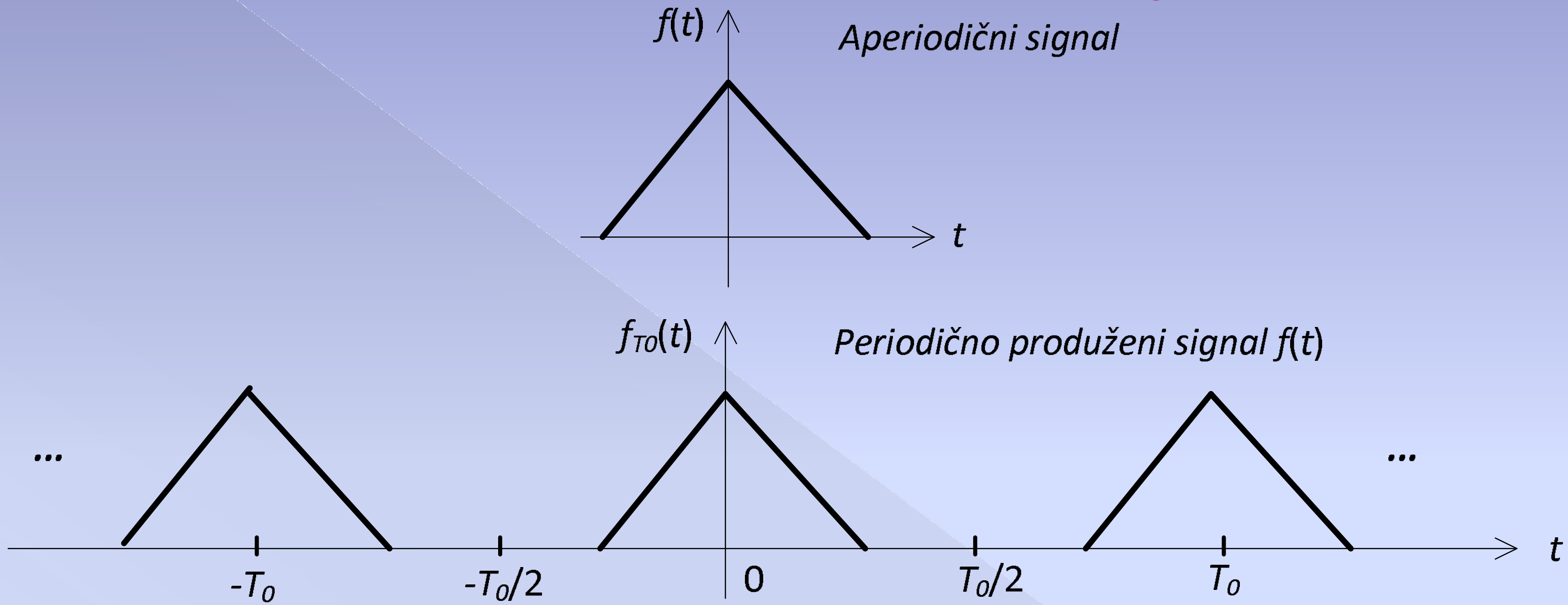
V termin

Dr Nevena Radović

Fourier-ova transformacija

- Problem: Fourier-ovim redom se predstavljaju samo periodični signali. Kako predstaviti spektar aperiodičnih signala?
- Rješenje: Periodičnim produženjem aperiodičnog signala dobijamo peridični signal koji sada možemo prestaviti Fourier-ovim redom.

Fourier-ova transformacija



- $f_{T_0}(t)$ je periodična funkcija, te se stoga može predstaviti Fourier-ovim redom (npr. eksponencijalnim).
- Zapažanje: $$\lim_{T_0 \to \infty} f_{T_0}(t) \equiv f(t)$$

Fourier-ova transformacija

- Podsjetimo se kako izgleda Fourier-ov transformacioni par:

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \qquad D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- <u>Pitanje</u>: Kako se mijenja priroda spektra sa povećanjem T_0?
- Djelimično kontinualna funkcija (po kontinualnom promjenljivoj ω - frekvencija):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad \Rightarrow D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$$

- Sa povećanjem T_0, povećava se broj odbiraka i istovremeno se smanjuje amplituda signala D_n jer se množi sa $1/T_0$.

Fourier-ova transformacija

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_0)}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

- kada $T_0 \to \infty$, $\omega_0 \to 0$ (jer je $\omega_0 = 2\pi/T_0$) pa slijedi da ω_0 zamjenjujemo sa $\Delta\omega = 2\pi/T_0 \sim 0$, odnosno:

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\Delta\omega)\Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t}$$

- Dalje možemo pisati:

$$f(t) \equiv \lim_{T_0 \to \infty} f_{T_0}(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourier-ova transformacija

- F(ω) je ***direktna Fourier-ova transformacija (FT)***
- $f(t)=FT^{-1}[F(\omega)]$ je ***inverzna Fourier-ova transformacija***
- Dakle, Fourier-ov transformacioni par je:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- odnosno:

$$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$$

Fourier-ova transformacija

- Primjer: $f(t) = e^{-at} h(t)$
- Rješenje:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{a+j\omega}(0-1) = \frac{1}{a+j\omega}$$

- Amplitudski spektar:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

Fourier-ova transformacija

- Fazni spektar:

$$\arg|F(\omega)| = \underbrace{\arg(1)}_{0} - \arg(a + j\omega) = -arctg\frac{\omega}{a}$$

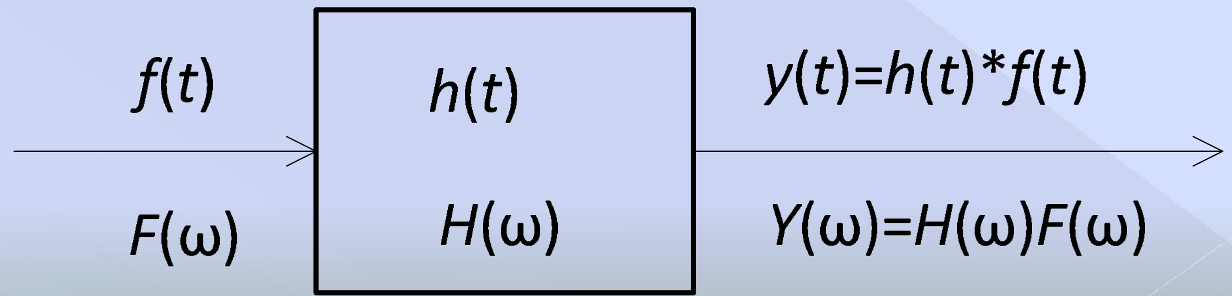
- Napomena: U opštem slučaju, za realno $f(t)$, njegov amplitudski spektar $|F(\omega)|$ je parna funkcija po ω, a fazni spektar je neparna funkcija po ω.

- Nemaju svi signali $f(t)$ Fourier-ovu transformaciju FT koja konvergira. Dovoljan uslov za konvergenciju je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Odziv linearnog sistema pomoću FT

- Ranije je pokazano da se za pobudu $e^{j\omega t}$ dobija odziv sistema (sa prenosnom funkcijom $H(\omega)$) oblika $H(\omega)e^{j\omega t}$.
- Na identičan način se može izvesti da za Fourier-ov transformacioni par $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ u frekvencijskom domenu važi: $Y(\omega)=H(\omega)F(\omega)$, dok je u vremenskom domenu: $y(t)=h(t)*f(t)$.



Osobine Fourier-ove transformacije

- ***Linearnost:***

  Ako su $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$ i $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(\omega)$ tada važi sljedeće:
  $$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- ***Simetrija:***

  Ako je $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ tada je $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(\omega)$.

  Veoma korisna osobina jer se može dogoditi da je *F*(ω) lako pronaći, a da je to naporan posao za traženje FT[*F*(*t*)].

- ***Skaliranje po vremenu:***

  Ako je $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ tada je $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}), \quad a \in R$

Osobine Fourier-ove transformacije

- ***Vremensko pomjeranje:***

  Ako je $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ tada je $f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega_0 t}$

- ***Frekvencijsko pomjeranje:***

  Ako je $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ tada je $f(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

- ***Konvolucija:***

  Ako je $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)$ i $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(\omega)$ tada važi sljedeće:

  $f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$ vremenska konvolucija

  $f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)$ frekvencijska konvolucija

Osobine Fourier-ove transformacije

- ***Diferenciranje i integraljenje po vremenu*:**

Ako je $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ tada je:

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

- Primjer: Znajući da je $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$, pronaći FT signala $f(t)\cos(\omega_0 t)$.

$$f(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[f(t)e^{j\omega_0 t} + f(t)e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$FT(f(t)\cos(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)\right]$$

Osobine Fourier-ove transformacije

- Primjer: Odrediti FT signala:

  a) $f(t)=4e^{-3t}h(t)$

  b) $g(t)=f(\frac{t}{2})$

- Rješenje:

  a) $F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty} 4e^{-3t}h(t)e^{-j\omega t}dt=$

$$=4\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}dt=-\frac{4}{3+j\omega}e^{-(3+j\omega)t}\Bigg|_{0}^{\infty}=$$

$$=-\frac{4}{3+j\omega}(e^{-\infty}-e^{0})=\frac{4}{3+j\omega}$$

Osobine Fourier-ove transformacije

- Rješenje:

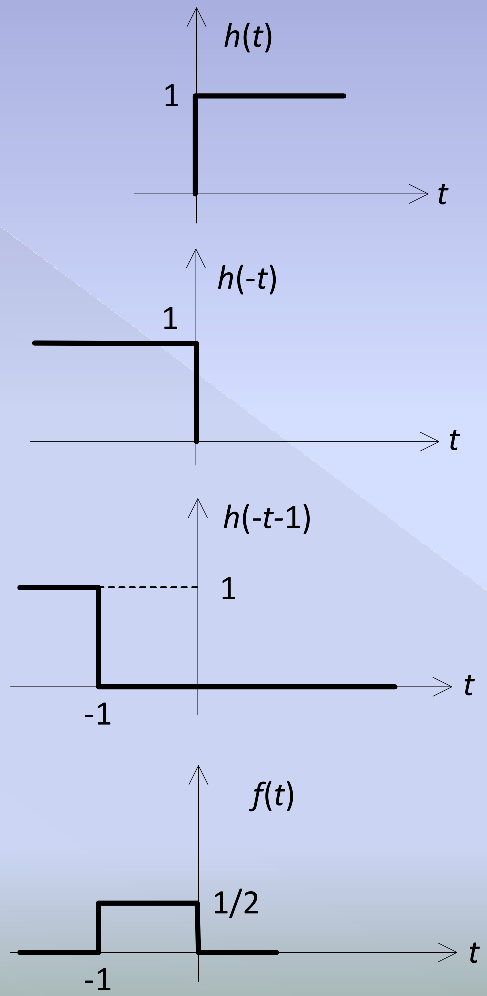
b) Imajući u vidu osobinu 3) (skaliranje po vremenu):

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in R$$

$$g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right), \quad a = \frac{1}{2}$$

$$G(\omega) = 2F(2\omega) = 2 \, \frac{4}{3 + j2\omega} = \frac{8}{3 + j2\omega}$$

- Primjer: Nacrtati signal $f(t)=\frac{1}{2}[h(-t)-h(-t-1)]$ i odrediti njegovu FT. Koristeći dobijeni rezultat odrediti FT signala $g(t)=f(t+\frac{1}{3})+2f(t-3)$.
- Rješenje:



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=\frac{1}{-j2\omega}(1-e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}-1}{j2\omega}$$

- Koristeći osobinu vremenskog pomjeranja:

$f(t-t_0)\Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega_0 t}$ dobijamo:

$$G(\omega)=FT[f(t+\frac{1}{3})]+2FT[f(t-3)]=$$

$$=F(\omega)e^{j\frac{\omega}{3}}+2F(\omega)e^{-j3\omega}=F(\omega)(e^{j\frac{\omega}{3}}+2e^{-j3\omega})=$$

$$=\frac{1}{2j\omega}(e^{j\omega}-1)(e^{j\frac{\omega}{3}}+2e^{-j3\omega})$$

Pitanja za provjeru znanja:

- Definisati sljedeće pojmove: signal; sistem; vremenski kontinulani signal; vremenski diskretni signal; analogni signal; digitalni signal; periodični signal; kauzani signal; nekauzalni signal; anitikauzalni signal.
- Energija i snaga kontinualnog signala (definicije).
- Jedinična step funkcija (Hevisajdova funkcija) i jedinična impulsna (Dirakova funkcija).
- Definisati linearni sistem. Koje uslove takav sistem zadovoljava?
- Šta je to sopstveni odziv sistema? Definisati i objasniti.
- Šta je to impulsni odziv sistema? Definisati i objasniti.
- Šta je to prinudni odziv sistema? Definisati i objasniti.
- Šta je to ukupni odziv sistema? Definisati i objasniti.

Pitanja za provjeru znanja:

- Šta je to konvolucija dvije funkcije? Definisati i objasniti. Definisati i konvoluciju proizvoljne funkcije sa impulsom.
- Šta je to skalarni proizvod dva signala? Za koje signale kažemo da su ortogonalni?
- Definisati trigonometrijski Fourier-ov red, sa svim pripadajućim koeficijentima.
- Definisati kompaktni trigonometrijski Fourier-ov red, sa svim pripadajućim koeficijentima.
- Definisati eksponencijalni Fourier-ov red, sa svim pripadajućim koeficijentima.
- Definisati Fourier-ovu transformaciju (direktnu i inverznu).
- Osobine Fourier-ove transformacije.